

# 基于一次近似模型的风力机叶片振动频率分析方法

高凯强<sup>1</sup>, 张志强<sup>1</sup>, 李爱群<sup>2</sup>

(1. 东南大学土木工程学院, 南京 210096; 2. 北京建筑大学, 北京 100044)

**摘 要:** 为分析风力机叶片在旋转时的振动频率, 采用刚-柔耦合一次近似模型, 并考虑离心刚化效应, 推导叶片在旋转时的动力学方程, 并给出叶片的刚度和质量矩阵的表达式。最后, 计算某风力机叶片在不同转速和不同轮毂半径下的振动频率。计算结果表明, 一次近似模型中的刚-柔耦合效应对叶片旋转时的各阶振动频率均有较大影响。研究结果对风力机叶片的动力学设计具有一定参考价值。

**关键词:** 叶片频率; 有限元法; 耦合模型; 一次近似理论; 离心刚化效应

**中图分类号:** TK83

**文献标识码:** A

## 0 引 言

叶片作为大型水平轴风力机的重要吸能部件, 其动力学性能是风力机叶片设计的重要内容。当叶片在旋转时, 其振动频率(区别于叶片静止时的固有频率)与外界激励力的频率相同时会发生共振。一般情况下, 系统的振动频率同单个叶片振动频率接近, 因此单个叶片的动力学分析具有重要意义。

在研究风力机风轮振动频率时, 很多学者采用不同的方法进行研究, 文献[1]采用瑞利-里兹法研究预弯叶片的振动频率, 文献[2]在计算约束多体系统旋转的自振频率时, 根据多体系统理论, 推导了运动方程, 并将之线性化。文献[3]基于文献[2]的研究成果, 分析叶片旋转时的振动频率。文献[4]研究叶片振动频率随叶片长度的变化规律。孙保苍等<sup>[5]</sup>在研究叶片振动模态时, 采用有限元方法并且考虑了离心刚化效应。信伟平<sup>[6]</sup>在分析叶片旋转振动频率时, 考虑了刚-柔耦合效应。但采用的是零次近似模型, 忽略横向变形对纵向影响的二次耦合项, 而在实际应用中, 零次近似模型可能会导致错误结论<sup>[7]</sup>。本文在研究叶片旋转的振动频率时, 将叶片等效为变截面悬臂梁, 采用较零次模型更为精确的一次近似耦合动力学模型, 并考虑离心刚化的影响。计算叶片在不同旋转速

度和不同轮毂半径下的振动频率, 并与只考虑离心刚化和采用零次近似模型的叶片进行对比, 同时对结果进行分析。

## 1 柔性梁的变形位移描述

作空间运动的柔性梁如图1所示,  $e^0$ 为惯性系,  $e^1$ 固结在未变形的梁中性轴的连体坐标系, 中线上任意一点  $p_0$  在变形后为  $p$ ,  $u_0$  为未变形时该点在连体坐标系下的位置向量为:

$$u_0 = x e_1^1 + 0 e_2^1 + 0 e_3^1 \quad (1)$$

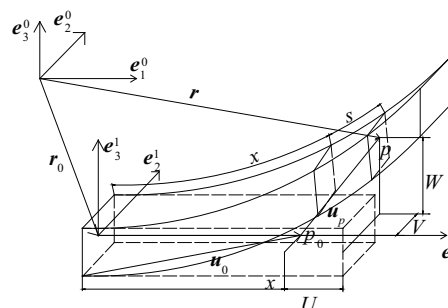


图1 一次近似模型中柔性梁变形的几何描述

Fig. 1 Description of deformation of elastic beam in one order approximation model

$u_p$  为该点变形在连体坐标系下的位置向量,  $s(x, t)$  为  $p$  点的轴向实际伸长量。  $U(x, t)$ ,  $V(x, t)$ ,  $W(x, t)$  为该点在连体坐标系下的变形位移, 根据弹

收稿日期: 2016-06-06

基金项目: 国家自然科学基金(51438002); 江苏省产学研前瞻项目(BY2016076-11)

通信作者: 张志强(1969—), 男, 博士、副教授、博士生导师, 主要从事结构振动控制方面的研究。zzq1969@seu.edu.cn

性体几何变形关系可知<sup>[8]</sup>:

$$x+s=\int_0^x \left[1+\left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\right)^2\right] d\varepsilon \quad (2)$$

将(2)式的右端二项式展开,并化简可得:

$$U=s-\frac{1}{2}\int_0^x \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\right)^2\right] d\varepsilon \quad (3)$$

则梁中线上任一点的任一点  $p$  变形位移向量在连体坐标系下为:

$$u_p=\begin{bmatrix} U_p \\ V_p \\ W_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s-\frac{1}{2}\int_0^x \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\right)^2\right] d\varepsilon \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (4)$$

考虑小转动<sup>[9]</sup>,则梁上非中线上一点  $m$  的位移场在连体坐标系上可表示为:

$$u_m=\begin{bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s-y\frac{\partial V}{\partial x}-z\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{1}{2}\int_0^x \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\right)^2\right] d\varepsilon \\ V-\theta_1 z \\ W+\theta_1 y \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中,  $\theta_1$  ——截面扭转角;  $\varepsilon$  ——微元段伸长率。

在纵向变形  $U$  中,  $-\frac{1}{2}\int_0^x \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\right)^2\right] d\varepsilon$  是变形的二次耦合项,而零次近似理论忽略了二次耦合项,纵向变形为  $U=s-y\frac{\partial V}{\partial x}-z\frac{\partial W}{\partial x}$ 。

## 2 柔性梁作定轴转动时的动力学方程

如图2所示,  $xyz$  为参考基,  $x'y'z'$  为连体基,  $z$  轴和  $z'$  轴平行,连体基原点固结在未变形的梁的一端上,连体基绕  $z$  轴作匀速定轴转动,角速度为  $\alpha$ 。 $r_0$  为连体基原点关于参考基的矢径,模为  $R$ 。 $\rho_0'$  为未变形时梁的非中线上任意一点  $k$  关于连体基原点的矢径,  $u_0'$  为变形位移矢量,则在参考基下,  $k$  点矢径  $r$  可表示为式(6)。

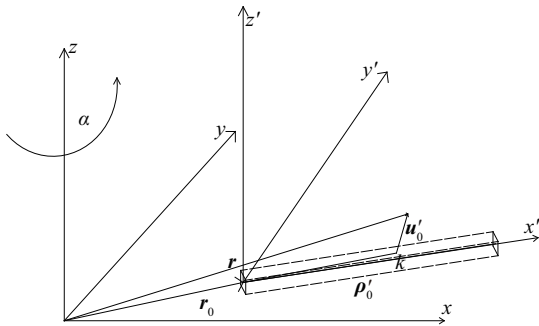


图2 梁作定轴转动

Fig. 2 Beam rotates around a fixed axis

$$r=r_0+A(\rho_0'+u_0') \quad (6)$$

式中,  $A$  ——连体基关于参考基的方向余弦矩

$$阵, A=\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

对式(6)求导,可得  $k$  点速度在参考基下为:

$$(\dot{r})=(\dot{r}_0)+A\dot{\alpha}(\rho_0'+u_0')+A(\dot{u}_0') \quad (7)$$

式中,  $(\dot{\phantom{x}})$  ——对时间求导;  $\dot{\alpha}$  ——反对称矩

$$阵, \dot{\alpha}=\begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

下面采用有限元方法对柔性梁进行离散,将梁离散成  $n$  个单元,每个单元由 2 个节点  $i$  和  $j$ ,每个节点具有 3 个平动自由度和 3 个转动自由度,单元节点的位移向量可表示为:

$$u_{fi}=\{u^i, v^i, w^i, \theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i, u^j, v^j, w^j, \theta_1^j, \theta_2^j, \theta_3^j\}^T \quad (8)$$

在右手螺旋坐标系下,不考虑剪切变形的影响,可利用以下形函数来表示梁中线的任一点的位移和转角。

$$\begin{cases} s_i=N_1u_{fi}, U_i=s-\frac{1}{2}u_{fi}^T H u_{fi}, V_i=N_2u_{fi}, W_i=N_3u_{fi}, \\ \theta_1=N_4u_{fi}, \theta_3=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial N_2}{\partial x}u_{fi}, \theta_2=-\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial N_3}{\partial x}u_{fi}, \\ N_1=[a_1, 0, 0, 0, 0, 0, a_2, 0, 0, 0, 0, 0], \\ N_2=[0, b_1, 0, 0, 0, 0, b_2, 0, b_3, 0, 0, 0, b_4], \\ N_3=[0, 0, b_5, 0, b_6, 0, 0, 0, 0, b_7, 0, b_8, 0], \\ N_4=[0, 0, 0, a_1, 0, 0, 0, 0, 0, a_2, 0, 0, 0], \\ H=\int_0^x \frac{\partial N_2}{\partial \bar{x}} \frac{\partial N_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial N_3}{\partial \bar{x}} \frac{\partial N_3}{\partial \bar{x}} d\bar{x}, (\bar{x} \in (0, l)) \\ a_1=1-\xi, a_2=\xi, b_1=1-3\xi^2+2\xi^3, \\ b_2=l(\xi-2\xi^2+\xi^3), b_3=3\xi^2-2\xi^3, \\ b_4=l(-\xi^2+\xi^3), b_5=1-3\xi^2+2\xi^3, \\ b_6=l(-\xi+2\xi^2-\xi^3), b_7=3\xi^2-2\xi^3, \\ b_8=l(\xi^2-\xi^3), \xi=\frac{x-x_i}{x_j-x_i}=\frac{x-x_i}{l} \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $i$  ——第  $i$  梁个单元;  $H$  ——二次耦合形函数,这是零次近似模型所忽略的。

根据式(5),则梁上任一点的位移可表示为:

$$\begin{aligned} u_0' &= \begin{bmatrix} U_{0i}' \\ V_{0i}' \\ W_{0i}' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_1u_{fi}-y\frac{\partial N_2}{\partial x}u_{fi}-z\frac{\partial N_3}{\partial x}u_{fi}-\frac{1}{2}u_{fi}^T H u_{fi} \\ N_2u_{fi}-zN_4u_{fi} \\ N_3u_{fi}+yN_4u_{fi} \end{bmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

设梁长为  $L$ , 密度为  $\rho$ , 截面积为  $A$ , 弹性模量为  $E$ , 剪切模量为  $G$ , 惯性矩为  $I_z$  和  $I_y$ , 极惯性矩为  $I_p$ , 且考虑旋转产生的离心惯性势能, 则梁的弹性势能  $U_b$  [10] 可表示为:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GI_p \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L F(x) \left( \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (11)$$

式中,  $F(x)$  ——距离梁端  $x$  处截面的离心力 [11]。

$$F(x) = \rho A \alpha^2 \left[ R(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \quad (12)$$

梁的动能  $T_b$  可表示为:

$$T_b = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV \quad (13)$$

考虑到变形耦合项  $-\frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{H} \mathbf{u}_i$  是横向位移的 2 阶小量, 在动能表达式展开时, 可以做适当的简化, 舍去与  $-\frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{H} \mathbf{u}_i$  相关的一些高阶项 [12]。

由 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_b}{\partial \dot{\mathbf{u}}_n} \right) - \frac{\partial T_b}{\partial \mathbf{u}_n} + \frac{\partial U_b}{\partial \mathbf{u}_n} = \mathbf{Q} \quad (14)$$

将式(11)和式(13)代入式(14), 根据柔体多体系统建模方法 [13], 可得:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{G} \dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K} \mathbf{u}_n = \mathbf{Q} \quad (15)$$

式中,  $\mathbf{u}_n = \{\mathbf{u}_i\}^T = \{\mathbf{u}_{i1}, \mathbf{u}_{i2}, \dots, \mathbf{u}_{in}\}^T$ , 具体表达式可参阅文献 [13]。

### 3 叶片振动频率分析

#### 3.1 模态方程

由式(15)可得叶片的特征方程为:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n = \omega^2 \mathbf{K} \mathbf{u}_n \quad (16)$$

为计算叶片的振动频率, 将叶片等效成变截面矩形梁, 截面沿长度线性变化。且截面具有 2 个对称轴, 则可以求得:

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i, \\ \mathbf{M}_i = \int_{vi} \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3 + (y^2 + z^2) \mathbf{N}_4^T \mathbf{N}_4 dV + \\ \int_{vi} y^2 \frac{\partial \mathbf{N}_2^T}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial \bar{x}} + z^2 \frac{\partial \mathbf{N}_3^T}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \bar{x}} dV \\ \alpha^2 \rho \int_{vi} (R+x) \mathbf{H} dV \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i, \\ \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{fi} - \alpha^2 \rho \int_{vi} \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + z^2 \mathbf{N}_4^T \mathbf{N}_4 dV - \\ \alpha^2 \rho \int_{vi} y^2 \frac{\partial \mathbf{N}_2^T}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial \bar{x}} + z^2 \frac{\partial \mathbf{N}_3^T}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \bar{x}} dV + \\ \alpha^2 \rho \int_{vi} (R+x) \mathbf{H} dV \end{cases} \quad (18)$$

式中,  $\mathbf{K}_{fi}$  ——第  $i$  个梁单元考虑离心刚化效应后的刚度矩阵;  $\alpha^2 \rho \int_{vi} (R+x) \mathbf{H} dV$  ——一次近似模型中的附加项, 传统的零次模型不包含该项。

#### 3.2 算 例

某风力机叶片长度为 30 m, 叶片根部宽度为 3 m, 根部厚度为 0.8 m, 叶尖宽度为 0.3 m, 叶尖厚度为 0.08 m, 叶片密度为 1900 kg/m<sup>3</sup>, 展向弹性模量为 4.26×10<sup>10</sup> N/m<sup>2</sup>, 径向弹性模量为 1.65×10<sup>10</sup> N/m<sup>2</sup>, 切向弹性模量为 1.65×10<sup>10</sup> N/m<sup>2</sup>, 剪切模量为 0.55×10<sup>10</sup> N/m<sup>2</sup>。计算叶片在不同情况下的振动频率, 并与 ANSYS 的计算结果进行对比, 其结果主要如表 1 和图 3、图 4 所示。

表 1 当转速为 2.856 rad/s, 轮毂半径为 3 m 时, 叶片振动频率比较

Table 1 Comparison of vibrational frequencies of blade, when rotation speed and radius of hub is 2.856 rad/s and 3 m respectively

模型	频率阶次/Hz				
	1	2	3	4	5
静止	1.41312	3.62156	5.23795	7.18583	12.30108
静止 (ANSYS)	1.39299	3.61166	5.22760	7.17739	12.27540
离心刚化	1.69416	3.92604	5.28709	7.45995	12.49778
离心刚化 (ANSYS)	1.55513	3.78431	5.25211	7.33613	12.43220
零次近似+ 离心刚化	1.69415	3.92603	5.28710	7.45386	12.49363
一次近似	1.62774	4.52096	5.30828	9.10310	13.96915
一次近似+ 离心刚化	1.8860	4.78959	5.39501	9.38113	14.05389

由表 1 以及图 3 和图 4 可得出以下主要结论:

1) 由表 1 可知, 在额定转速时, 叶片的各阶振动频率均高于静止时的各阶固有频率, 只考虑离心刚化的叶片振动频率和零次模型加离心刚化的振

动频率几乎相同。一次近似模型对叶片表现出刚化效应,且对叶片的高阶振动频率影响与只考虑离心刚化效应相比更为明显,其2阶~4阶振动频率大于离心刚化效应的相应频率。

2)由图3可知,零次近似模型对梁的振动频率具有软化效应,但这种作用在低转速下不明显,只有在很高转速下,才能体现出来。在低转速范围时,随着转速的提高,一次近似模型的一阶振动频率提高,体现对叶片的刚化效应,但是超过一定的转速后,其一阶振动频率又随着转速的提高而减小,体现对叶片的软化效应。考虑了离心刚化效应后,叶片的一阶振动频率始终随转速的增加而增加。

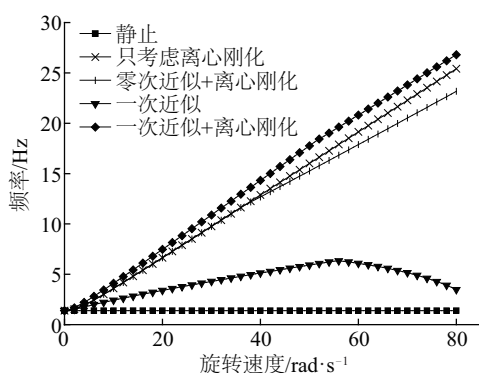


图3 第1阶振动频率随转速的变化

Fig. 3 First natural frequency varied with change of rotation speed

3)由图4可知,在额定转速时,除了静止情况以外,叶片的一阶振动频率均随着轮毂半径的增大而增大。零次模型对叶片的软化作用非常不明显,只考虑离心刚化和零次模型加离心刚化这2条曲线基本重合。

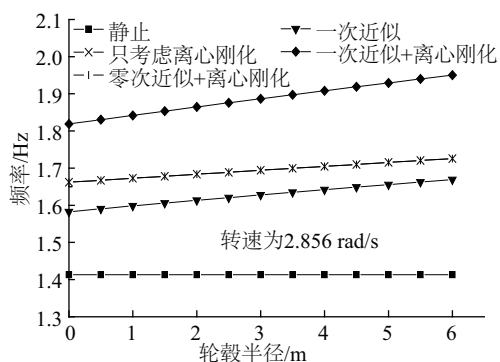


图4 第1阶振动频率随轮毂半径的变化

Fig. 4 First natural frequency varied with change of radius of hub

## 4 结 论

1)本文推导叶片在考虑一次近似模型下的动力学方程,并计算叶片在旋转时的振动频率。通过对叶片的振动频率计算对比可看出,在额定转速下,考虑一次近似模型的叶片各阶振动频率相比静止情况均有提高,且对高阶振动频率的影响更为显著,这与以往文献[5,6]只考虑离心刚化效应和采用零次近似模型得出的结论有明显的区别。

2)一次近似模型对叶片产生刚化效应还是软化效应,具体取决于叶片的转速以及自身刚度和质量分布,而对于大型风力机叶片这种细长悬臂梁式结构,且一般转速较低的情况下,主要体现对叶片的刚化效应,而零次近似模型只对叶片产生软化效应,这是两种模型的显著区别。这也表明一次近似模型理论较零次近似模型更为精确。

### [参考文献]

- [1] Yoo Hong Hee, Park Jung Hun, Park Jang Hyun. Vibration analysis of rotating pre-twisted blades [J]. Computers and Structures, 2001, 79(19): 1811—1819.
- [2] Choi Dong Hwan, Park Jung Hun, Yoo Hong Hee. Modal analysis of constrained multibody systems undergoing rotational motion [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 280(1-2): 63—76.
- [3] Park Jung Hun, Park Hyun Yong, Jeong Seok Yong, et al. Linear vibration analysis of rotating wind turbine blade [J]. Current Applied Physics, 2010, 10(2): S332—S334.
- [4] John J, Radford D W, Venayagamoorthy S K, et al. Elastic field and frequency variation in extendable wind turbine blades [J]. Journal of Solar Energy Engineering, 2016, 138(5): 054502.
- [5] 孙保苍, 李鹏飞. 考虑应力刚化影响的风力机叶片振动模态分析 [J]. 可再生能源, 2012, 30(5): 38—41.
- [5] Sun Baocang, Li Pengfei. The simulation analysis of the vibration modal on a wind turbine blade under the stress stiffening effect [J]. Renewable Energy Resources, 2012, 30(5): 38—41.
- [6] 信伟平. 风力机旋转叶片动力特性及响应分析 [D]. 汕头: 汕头大学, 2005.
- [6] Xin Weiping. Analysis of dynamic characteristics and response for rotating blades of wind turbine [D].

- Shantou: Shantou University, 2005.
- [7] Kane T R, Ryan R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1987, 10(2): 139—151.
- [8] Yoo H H, Ryan R R, Scott R A. Dynamics of flexible beams undergoing overall motions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 181(2): 261—278.
- [9] Huang Chih Ling, Lin Wen Yi, Hsiao Kuo Mo. Free vibration analysis of rotating Euler beams at high angular velocity[J]. *Computer and Structures*, 2010, 88(17): 991—1001.
- [10] 吴艳红. 旋转叶片刚柔耦合系统动力学研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2011.
- [10] Wu Yanhong. Dynamic analysis of rigid-flexible coupling system of a rotating blade[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2011.
- [11] Naguleswaran S. Lateral vibration of a centrifugally tensioned uniform Euler-Bernoulli beam[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 176(5): 613—624.
- [12] 吴胜宝. 作大范围运动柔性梁和柔性薄板刚-柔耦合动力学建模与仿真[D]. 南京: 南京理工大学, 2009.
- [12] Wu Shengbao. Modeling and simulation of flexible beam and flexible thin plate undergoing large overall motion on rigid-flexible coupling dynamic[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2009.
- [13] 刘锦阳. 刚-柔耦合动力学系统的建模理论研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2000.
- [13] Liu Jinyang. Study on dynamic modeling theory of rigid-flexible coupling systems[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2000.

## METHOD OF VIBRATIONAL FREQUENCY ANALYSIS OF WIND TURBINE BLADE WITH FIRST ORDER APPROXIMATION MODEL

Gao Kaiqiang<sup>1</sup>, Zhang Zhiqiang<sup>1</sup>, Li Aiqun<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China;

2. Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China)

**Abstract:** To analyze the vibrational frequencies of wind turbine blades under rotation condition, the first order approximation model was adopted and the centrifugal stiffening effect was included to derive the dynamic equation of the rotating blade. The formula of stiffness matrix and mass matrix were given in this paper. Finally, the vibrational frequency of a wind turbine blade was calculated with the different rotation speed and different radius of hub. The results show that the rigid-flexible coupling effect in the first order approximation model has great effects on the vibrational frequencies of rotating blades. The results of the paper have some reference value to the dynamic design of wind turbine blades.

**Keywords:** blade frequencies; finite element method; coupled model; first order approximation theory; centrifugal stiffening effect