

文章编号: 0254-0096(2018)09-2493-06

# 模态法在波浪能装置水动力学计算中的应用

张超<sup>1,3</sup>, 游亚戈<sup>1,2</sup>, 王文胜<sup>1,2</sup>, 叶寅<sup>1,2</sup>, 王振鹏<sup>1,3</sup>

(1. 中国科学院广州能源研究所, 广州 510070; 2. 中国科学院可再生能源与天然气水合物重点实验室, 广州 510640;  
3. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要:** 采用模态法求解线性入射波作用下振荡浮子式波浪能装置的三维水动力学问题。对于无穷远处扩散条件转换成辐射面条件进行专门的考虑,即将流场分为内外两部分,外部域中求得的速度势和速度势的法向导数在内外域分界面上与内部域的解相匹配。根据该方法编制的程序对一些典型算例进行计算,与其他方法得到的结果较吻合。应用该计算方法还对振荡浮子式波浪能装置具有约束性的水动力学问题进行计算,计算结果可有效指导实际装置的设计及优化工作。

**关键词:** 波浪能转换; 水动力学; 线性系统; 模态分析; 约束满足问题

中图分类号: O353.2

文献标识码: A

## 0 引言

波浪能是一种分布广泛、储量丰富的清洁可再生能源,开发波浪能不仅可为边远海岛等地提供电力,还可利用波浪能提供的动力进行海水淡化、制氢等<sup>[1]</sup>。波浪能作为一种重要的海洋能源,是中国未来能源结构中的重要组成部分。

波浪能装置起着吸收波浪能量的作用,而设计波浪能装置必须以装置的水动力学性能为依据,水动力学数值计算是获取装置性能不可或缺的手段。关于计算波浪能装置的水动力学性能的研究方法,一般可分为解析方法<sup>[2-4]</sup>和数值方法<sup>[5-8]</sup>。解析方法对结构简单对称的波浪能装置有优越性,但对于复杂形状的振荡浮子式装置计算繁琐,甚至无理论解,而只能应用数值方法求解<sup>[9]</sup>。基于线性势流理论,本文给出一种利用模态法求解振荡浮子式波浪能装置三维水动力系数的数值解法,并与经典算例<sup>[10-13]</sup>进行比较,证明该计算方法的可行性。另外波浪能装置无约束运动状态下的研究成果很多,但实际中波浪能装置的水动力计算在理论上多为具有约束的水动力学问题,本文给出的计算方法不仅可以对振荡浮子式波浪能装

置的纵荡、垂荡、横荡、横摇、首摇、纵摇 6 种无约束的运动模态进行计算,还可对振荡浮子式装置具有约束性的水动力学问题进行计算,得到的结果对波浪能装置的设计及优化有着积极的指导意义。

## 1 理论概述

### 1.1 数学模型

一个任意形状的三维浮体在初始时静止的理想流体中做单位振幅,频率为  $\omega$  的  $j$  模态简谐振荡运动,其速度可设为:

$$\dot{x}_j = \text{Re}(i\omega e^{i\omega t}) \quad (1)$$

式中,  $j$ ——浮子的运动模态数,  $j$  的取值等于系统的自由度。

假设流体是无旋的,振荡浮体做微幅振荡运动,那么由振荡浮体在  $j$  模态下引起的辐射速度势,其稳态解  $\Phi_j(x, y, z, t)$  可表示为:

$$\Phi_j(x, y, z, t) = \text{Re}(\phi_j(x, y, z)e^{i\omega t}) \quad (2)$$

式中,  $\phi_j(x, y, z)$ ——浮体  $j$  模态下的空间辐射速度势,与时间无关。

直角坐标系取法及计算域如图 1 所示。

收稿日期: 2016-06-21

基金项目: 中国科学院战略性先导科技专项 A 类(XDA13040201); 国家自然科学基金青年基金(41406102)

通信作者: 游亚戈(1956—), 男, 硕士、研究员、博士生导师, 主要从事波浪能转换方面的研究。youyg@ms.giec.ac.cn

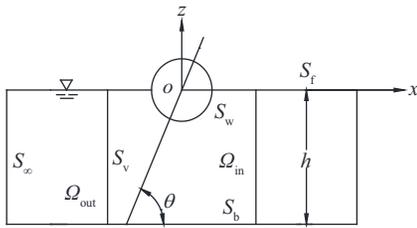


图1 坐标系及计算域的划分

Fig. 1 Coordinate system and division of computational domain

坐标系原点定义在静水面上,  $x$  轴水平向右为正,  $y$  轴垂直纸面向内为正,  $z$  轴垂直向上为正,  $oxy$  平面与静水面重合。假设远离装置的外海具有直海岸和等深的海底, 将其定义为外域  $\Omega_{out}$ 。外域由内外域分界面  $S_v$ 、外边界面  $S_\infty$ 、自由液面  $S_f$  和海底面  $S_b$  组成。装置本身及其附近的海域, 定义为内域  $\Omega_{in}$ 。内域由内外域分界面  $S_v$ 、物体表面  $S_w$ 、自由液面  $S_f$  和海底面  $S_b$  组成。

## 1.2 外域问题及求解

外域空间辐射速度势  $\phi_j$  满足以下条件:

在外部流场域  $\Omega_{out}$  内:

$$\nabla^2 \phi_j(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

在自由液面  $S_f$  上:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi_j \quad (4)$$

在底面边界面  $S_b$  上:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

在无穷远的边界条件  $S_\infty$  上:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial R} + ik \phi_j \right) = 0 \quad (6)$$

式中,  $k$  ——入射波数,  $k \cdot \tanh(kh) = \omega^2/g$ , 其中  $h$  为外域水深,  $g$  为重力加速度。

在  $z$  方向上进行变量分离, 利用分离变量法, 由式(3)~式(6)可得, 外域空间辐射势  $\phi_j$  可展开成如下级数:

$$\phi_j = C(z) \varphi_0(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} D_m(z) \varphi_m(x, y) \quad (7)$$

$$C(z) = \cosh[k(h+z)] / \cosh(kh) \quad (8)$$

$$D_m(z) = \cos[k_m(h+z)] / \cos(k_m h) \quad (9)$$

式中,  $\varphi_0(x, y)$  ——向远方传播的行进波的平面速度势;  $\varphi_m(x, y)$  ——随着距离增加迅速消失的驻波的

平面速度势, 其中下标变量  $m = 1, 2, \dots, \infty$ ,  $m$  的取值范围与计算精度有关。

$k_m$  为满足下列方程的正实数解:

$$\omega^2/g = -k_m \tan(k_m h) \quad (10)$$

$\varphi_0(x, y)$  和  $\varphi_m(x, y)$  分别满足以下条件:

$$\nabla^2 \varphi_0(x, y) + k^2 \varphi_0(x, y) = 0 \quad (11)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial R} + ik \varphi_0 \right) = 0 \quad (12)$$

以及

$$\nabla^2 \varphi_m(x, y) - k_m^2 \varphi_m(x, y) = 0 \quad (13)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi_m = 0 \quad (14)$$

在外域中利用格林函数法求解  $\varphi_0$  和  $\varphi_m$  可得:

$$-\frac{1}{2} \varphi_0 = \int_{C_r} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} G_0 - \frac{\partial G_0}{\partial n} \varphi_0 \right] dl \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2} \varphi_m = \int_{C_r} \left[ \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} G_m - \frac{\partial G_m}{\partial n} \varphi_m \right] dl \quad (16)$$

式中,  $G_0$  ——行进波的格林函数;  $G_m$  ——衰减波的格林函数;  $C_r$  ——积分边界, 即内外域分界面  $S_v$  在水平面上的投影。

满足上面定解问题和边界条件的格林函数:

$$G_0(P, Q) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) \quad (17)$$

$$G_m(P, Q) = K_0(k_m R) / 2\pi \quad (18)$$

式中,  $H_0^{(1)}(kR)$  ——零阶汉克尔函数, 又称第三类贝塞尔函数;  $K_0(k_m R)$  ——第二类修正贝塞尔函数;  $R$  —— $PQ$  两点间的水平距离,  $m$ 。

由式(10)解得的最小根  $k_m > \pi/(2h)$ , 且  $\varphi_m$  为非波动解, 在远场迅速收敛到 0, 因此当  $R = 2h$  时, 所有  $\varphi_m$  的量级都将减少到  $10^{-2}$  以下。对  $m$  合理取值, 既满足计算精度又减少计算时间。

将式(17)、式(18)代入式(15)、式(16)并离散化, 将离散化结果代入式(7)可得到内外域分界面  $S_v$  上速度势和速度势法向导数需要满足的关系, 这样无穷远处的扩散条件就转化为内域的辐射面条件。

## 1.3 内域问题及求解

内域空间辐射速度势的定解问题和边界条件满足以下条件:

在内部流场域  $\Omega_{in}$  内:

$$\nabla^2 \phi_j(x, y, z) = 0 \quad (19)$$

自由液面  $S_f$  上:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi_j \quad (20)$$

在物体表面  $S_w$  上:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} \Big|_{S_w} = n_j \quad (21)$$

式中,  $n_j$ ——浮体做  $j$  模态运动时的速度方向在物体表面广义法线方向的分量。

在本计算方法中,  $j$  的取值等于系统的自由度,  $n_j$  是浮体面元的单位法线方向(指向浮体内部)和浮体模态运动中单位速度方向的内积。  $n_j$  与模态运动有关,不同的模态运动对应不同的  $n_j$ 。

在底面边界  $S_b$  上,则有:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = 0 \quad (22)$$

速度势及其法向导数在内外域分界面  $S_s$  上应保持连续,故在内外域分界面的边界条件上满足式(7)。

在内域利用格林函数法可得:

$$-\frac{1}{2} \phi_j(P) = \iint_S \left[ \phi_j \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right] dS \quad (23)$$

式中,  $G$ ——格林函数,  $G = 1/(4\pi r)$ ;  $S$ ——内域所有边界面,  $S = S_s + S_f + S_w + S_b$ 。

当取离散单元的长度小于  $1/20$  入射波长时,单元内的速度势可被认定为常量并可从积分式中提取出来。按照此方法离散式(23),得到在内域所有边界面上速度势和速度势的法向导数的关系式。将式(7)、式(20)~式(22)代入式(23)中,移项整理可得:

$$[A] \begin{Bmatrix} \varphi_{j0} \\ \varphi_{jm} \\ \phi_j \end{Bmatrix} = [B] \quad (24)$$

式中,  $A, B$ ——系数矩阵;  $m$ ——系数,在数值计算中取有限项,根据内域大小取值。

求解此线性方程组可得到浮体做  $j$  模态运动时在各个边界条件面上的辐射速度势。

#### 1.4 附加质量、辐射阻尼和辐射作用力的计算

得到速度势在振荡浮体表面上的值后,浮体的水动力学系数附加质量和辐射阻尼即可求得,进而可利用水动力学系数求得辐射作用力。辐射作用力是由物体运动产生的辐射势对物体的作用

力。由振荡物体  $j$  模态运动方向引起的流体作用在其自身上的  $k$  模态运动方向上的辐射力或力矩为:

$$F_k = \operatorname{Re} \left( i \rho \omega e^{i\omega t} \int_{S_w} \phi_j n_k dS \right) \quad (25)$$

辐射力和水动力学系数满足以下关系:

$$F_k = -a_{kj} \ddot{x}_j - b_{kj} \dot{x}_j \quad (26)$$

式中,  $a_{kj}$ ——浮体  $j$  模态运动方向在  $k$  模态方向的附加质量;  $b_{kj}$ ——浮体  $j$  模态运动方向在  $k$  模态方向的辐射阻尼;  $k, j$  的取值取决于系统的自由度。

比较式(25)和式(26)可得附加质量  $a_{kj}$  和辐射阻尼  $b_{kj}$  的表达式为:

$$\begin{aligned} a_{kj} &= \frac{\rho}{\omega} \int_{S_w} \operatorname{Im}(\phi_j) n_k dS \\ b_{kj} &= \rho \int_{S_w} \operatorname{Re}(\phi_j) n_k dS \end{aligned} \quad (27)$$

为便于比较,将  $\omega$ 、 $a_{kj}$  和  $b_{kj}$  无量纲化,无量纲化的频率  $\bar{\omega}$ 、附加质量  $\alpha_{kj}$  和辐射阻尼  $\beta_{kj}$  为:

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{L}{2g}} \quad (28)$$

$$\alpha_{kj} = \frac{a_{kj}}{\rho V L^{m_j+m_k}} \quad (29)$$

$$\beta_{kj} = \frac{b_{kj}}{\rho V L^{m_j+m_k}} \sqrt{\frac{L}{2g}} \quad (30)$$

式中,  $V$ ——振荡物体的排水量;  $L$ ——物体的特征长度;  $k, j$  的取值取决于系统的自由度。

$$m_j = \begin{cases} 0, & j=1,2,3 \\ 1, & j=4,5,6 \end{cases} \quad (31)$$

$$m_k = \begin{cases} 0, & k=1,2,3 \\ 1, & k=4,5,6 \end{cases} \quad (32)$$

## 2 方法验证

根据以上理论,编制计算程序对典型算例进行试算。

### 2.1 长方体的水动力学系数比对

在该算例中,长方体的长度  $L$ 、宽度  $W$  和下潜深度  $D$  比例为  $L:W:D=2:2:1$ ,水深  $h=10D$ ,图2给出了长方体的无量纲附加质量和辐射阻尼系数的比对结果。从图2中可看出由本方法得到的结果和由文献[10,12]中的方法得到的结果十分吻合。

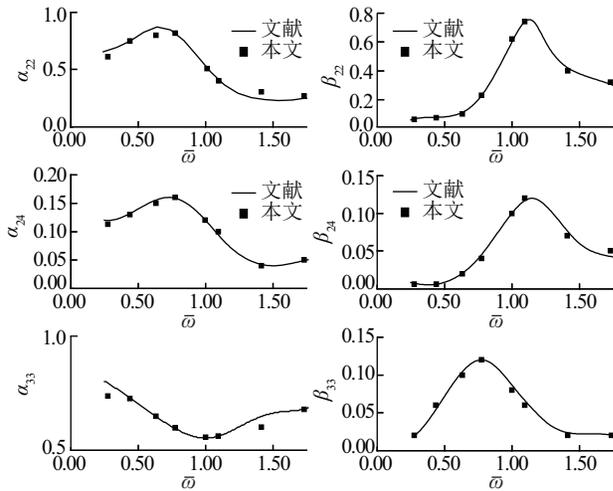


图2 长方体的无量纲水动力学系数对比

Fig. 2 Comparison of dimensionless added mass and damping coefficients for rectangular structure

### 2.2 半球的水动力学系数对比

在该算例中,水深与浮球的半径比为  $h = 10D$ 。图3给出了在水面垂荡运动的半球型浮体在  $z$  向的无量纲水动力学系数附加质量  $\alpha$  和辐射阻尼  $\beta$  的对比结果,可看出本文方法与文献[10,11,13]的结果吻合较好,进一步验证了本文的方法。

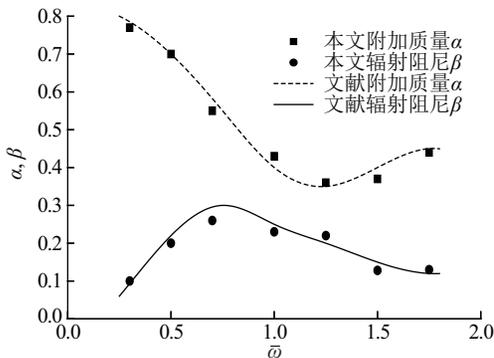


图3 浮球的无量纲水动力学系数对比

Fig. 3 Comparison of dimensionless added mass and damping coefficients for spherical structure

### 3 滑杆约束下浮球斜向运动模态的水动力学系数研究

应用本文的方法对漂浮在水中沿着斜滑杆运动的浮球的水动力学系数进行计算。装置模型如图1所示,滑杆穿过球心,与水平轴向的夹角为  $\theta$ ,

水深  $h$  与球半径  $R$  的比为  $h/R = 3$ 。在此系统中,当滑杆夹角  $\theta$  固定时,浮球只有一个运动模态,即浮球沿着滑杆运动的模态。

浮球沿着滑杆斜向运动模态下的单位速度在浮球面单元的广义单位法线方向的分量  $n$  与水平夹角  $\theta$  的关系为:

$$n = n_x \cos \theta + n_z \sin \theta \quad (31)$$

式中,  $n_x$  ——物面单元法线方向(指向浮体内部)在  $x$  轴方向的偏导数;  $n_z$  ——物面单元法线方向(指向浮体内部)在  $z$  轴方向的偏导数;  $\theta$  ——滑杆与水平轴的夹角,当角度  $\theta = 0^\circ$  时,浮球的运动模态相当于横荡,当角度  $\theta = 90^\circ$  时,浮球的运动模态相当于垂荡。

在不同入射波条件下,夹角  $\theta$  的变化对浮球水动力学系数的影响如图4所示。

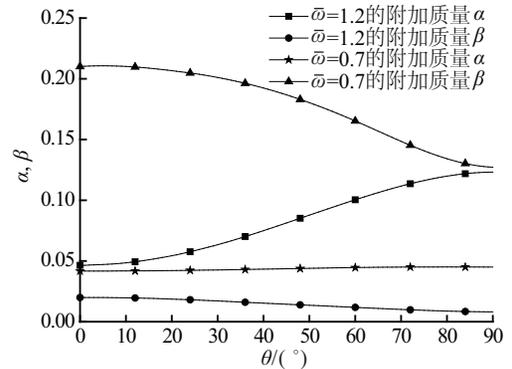


图4 不同角度下浮球的无因次水动力学系数

Fig. 4 Dimensionless added mass and damping coefficients of spherical structure in different angle

从图4可看出,虽然无论入射条件是  $\bar{\omega} = 0.7$  还是  $\bar{\omega} = 1.2$ ,随着角度的增大,附加质量在逐渐增大,辐射阻尼在逐渐减小,但是,不同的入射条件下,随着夹角  $\theta$  的变化,附加质量和辐射阻尼的变化率不同,这反映了装置对不同的入射条件的反应特性。如  $\bar{\omega} = 0.7$  时,随着角度的增大,附加质量增加量较小,辐射阻尼减小变化量较大,说明附加质量在这种入射条件下对夹角的变化不敏感;而在  $\bar{\omega} = 1.2$  时,附加质量变化量较大,辐射阻尼变化量较小,说明辐射阻尼在这种入射条件下对夹角变化不敏感。

利用浮体对入射条件的这种不同反应特性,根据所需要的设计要求对装置进行优化。由于浮体获得的能量的耗散只与辐射阻尼有关,附加质量是物体在流体中运动时推动的流体质量的总和。在相同入射条件下,附加质量越小,浮体运动幅度越

大。如果浮体是作为俘获波浪能的机构,则要求浮体具有较小的附加质量和辐射阻尼,这样可减少能量耗散,提高俘获效率;如果浮体是作为整个装置的水下基体,需要有较好的稳定性,则要求浮体要有较大的辐射阻尼和附加质量。根据不同的工况和设计要求,依照计算出的浮体的水动力学特性,就能对浮体进行设计和优化。

## 4 结 论

1)通过比对,验证方法的正确性。与其他解法相比,不仅限于形状规则简单的浮体,使计算的对象更广泛,而且计算过程更为简便。

2)本文的方法既可应用于三维复杂形状浮子在线性入射波作用下无约束运动模态的水动力学系数计算,还可针对约束条件下的波浪辐射力、附加质量和辐射阻尼系数等水动力学计算。计算结果对波浪能装置的设计及优化具有一定的参考价值。

本文通过对浮体在水动力学计算中运动模态的分析,认为模态法有望成为求解复杂约束条件下多自由度耦合的水动力学问题的计算方法,这将是未来此领域研究的热点。

### [参考文献]

- [1] 游亚戈,李伟,刘伟民,等.海洋能发电技术的发展现状与前景[J].电力系统自动化,2010,34(14):1—12.
- [1] You Yage, Li Wei, Liu Weimin., et al. Development status and perspective of marine energy conversion systems[J]. Automation of Electric Power Systems, 2010, 34(14): 1—12.
- [2] Garrett C J R. Wave forces on a circular dock[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1971, 46(1): 129—139.
- [3] Lee Jaw-Fang. On the heave radiation of a rectangular structure[J]. Ocean Engineering, 1995, 22(1): 19—34.
- [4] Zheng Yonghong, You Yage, Shen Yongming. On the radiation and diffraction of water waves by a rectangular buoy[J]. Ocean Engineering, 2004, 31(8-9): 1063—1082.
- [5] You Yage. Hydrodynamic analysis on wave power devices in near-short zones[J]. Journal of Hydrodynamics, 1993, 5(3): 42—54.
- [6] Hsu Hu-Hsiao, Wu Yung-Chao. Scattering of water wave by a submerged horizontal plate and a submerged permeable breakwater[J]. Ocean Engineering, 1998, 26(4): 325—341.
- [7] Yu Zhi, Falnes J. State-space modelling of a vertical cylinder in heave[J]. Applied Ocean Research, 1995, 17(5): 265—275.
- [8] Sannasiraj S A, Sundaravivelu R, Sundar V. Diffraction-radiation of multiple floating structures in directional waves[J]. Ocean Engineering, 2001, 28(2): 201—234.
- [9] 彭建军.振荡浮子式波浪能发电装置水动力性能研究[D].济南:山东大学,2014.
- [9] Peng Jianjun. Study on hydrodynamic performance for oscillating floater buoy wave energy converter[D]. Ji'nan: Shandong University, 2014.
- [10] 贺五洲,戴遗山.求解零航速物体水动力的简单Green函数方法[J].水动力学研究与进展,1992,7(4): 449—456.
- [10] He Wuzhou, Dai Yishan. The simple Green function technique for calculating the hydrodynamic forces acting on a body without forward speed[J]. Journal of Hydrodynamics, 1992, 7(4): 449—456.
- [11] Andersen P, He Wuzhou. On the calculation of two-dimensional added mass and damping coefficients by simple Green's function technique[J]. Ocean Engineering, 1985, 12(5): 425—451.
- [12] Vugts J H. The hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free surface[J]. International Shipbuilding Progress, 1968, 15(167): 251—276.
- [13] Kochin N E, Kibel I A, Roze N V, et al. Theoretical hydrodynamics[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(1): 237—245.

## APPLICATION OF MODAL METHOD TO HYDRODYNAMIC CALCULATION OF WAVE ENERGY DEVICE

Zhang Chao<sup>1-3</sup>, You Yage<sup>1,2</sup>, Wang Wensheng<sup>1,2</sup>, Ye Yin<sup>1,2</sup>, Wang Zhenpeng<sup>1-3</sup>

(1. *Guangzhou Institute of Energy Conversion, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou 510460, China;*

2. *Key Laboratory of Renewable Energy and Gas Hydrate, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou 510460, China;*

3. *University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)*

**Abstract:** Modal method is used for calculating three-dimensional hydrodynamic coefficients of wave power device performing harmonic oscillations due to linear waves in free surface. Special consideration has been given to the radiation boundary conditions on a cylinder surrounding the device. The cylinder divide flow field into two parts outside and inside. The velocity potential in the outer region of the cylinder is matched with the velocity potential in the inner region on the interface. To verify the correctness of the method, class examples in the reference are recomputed using computer program according to modal method and the obtained results are in good accordance with other methods. The method is also used for calculating hydrodynamic coefficients of device under the condition of constraint, and the result could instruct practice directly.

**Keywords:** wave energy conversion; hydrodynamics; linear systems; modal analysis; constraint satisfaction problems